

第2讲 有理数的乘方与混合运算

一、有理数的乘方

乘方	
定义	求n个 <u>相同</u> 因数的 <u>积</u> 的运算叫做乘方，乘方的结果叫做 <u>幂</u> . ①一般地，n个相同的因数a相乘，即$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n$，记作 <u>$a^n$</u>，读作 “<u>$a$ 的n次方</u>”； ②在a^n中，a叫做 <u>底数</u>，n叫做 <u>指数</u>；
运算法则	①负数的奇次幂是 <u>负数</u>，负数的偶次幂是 <u>正数</u>，即 “<u>奇负偶正</u>”； ②正数的任何次幂都是 <u>正数</u>； ③0的任何正整数次幂都是 <u>0</u> .

【备注】 【注意】

当 a^n 看作 a 的 n 次方的结果时，读作 a 的 n 次幂 .

一个数可以看作这个数本身的一次方，例如，5就是 5^1 ，指数1通常省略不写 .

幂的运算举例：

① $(-2)^2 = 4$ ，其底数为 (-2) ， $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ ；

② $-2^2 = -4$ ，其底数为2， $-2^2 = (-1) \times 2^2 = (-1) \times 2 \times 2 = -4$ ；

③ $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ ，其底数为 $\frac{3}{7}$ ， $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$ ；

④ $\frac{3^2}{7} = \frac{9}{7}$ ，其底数为3， $\frac{3^2}{7} = \frac{3 \times 3}{7} = \frac{9}{7}$ ；

⑤ $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ，带分数的乘方运算，一定要先化成假分数后再运算 .

注意：分数和负数作为底数时要加括号

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ 的底数是 _____，指数是 _____，运算后的结果是 _____

【答案】 $-\frac{1}{3}; 3; -\frac{1}{27}$

【解析】 $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ 的底数是 $-\frac{1}{3}$ ，指数是 3，运算后的结果是 $-\frac{1}{27}$ 。

【标注】【知识点】有理数乘方的定义

2. -4^2 的倒数是 ()。

- A. -8 B. $-\frac{1}{16}$ C. 16 D. $\frac{1}{8}$

【答案】 B

【解析】 $-4^2 = -16$ ，
 -16 倒数为 $-\frac{1}{16}$ 。
故选 B。

【标注】【知识点】有理数乘方运算

3. 下列各组运算中，运算后结果相等的是 ()。

- A. 4^3 和 3^4 B. -4^2 和 $(-4)^2$ C. $(-3)^3$ 和 -3^3 D. $-\frac{3^3}{4}$ 和 $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

【答案】 C

【解析】 A 选项： $4^3 = 64$ ， $3^4 = 81$ ，
B 选项： $-4^2 = -16$ ， $(-4)^2 = 16$ ，
C 选项： $(-3)^3 = -27$ ，
 $-3^3 = -27$ ，
D 选项： $-\frac{3^3}{4} = -\frac{27}{4}$ ，
 $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$ ，
故 $(-3)^3 = -3^3$ ，
故选 C。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】有理数乘方运算

4. 计算 $(-2)^{100} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 原式 $= (-2)^{99} \times (-2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
 $= \left[(-2)^{99} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99} \right] \times (-2)$
 $= \left[(-2) \times \left(\frac{1}{2}\right) \right]^{99} \times (-2)$
 $= (-1) \times (-2)$
 $= 2$.

故答案为：2 .

【标注】 【能力】运算能力

【知识点】有理数乘方运算

5. 计算 $(-2)^{200} + (-2)^{201}$ 的结果是 () .

A. -2

B. -2^{200}

C. 1

D. 2^{200}

【答案】 B

【解析】 方法一： $(-2)^{200} + (-2)^{201}$
 $= 2^{200} - 2^{201}$
 $= 2^{200} - 2^{200} \times 2$
 $= 2^{200} \times (1 - 2)$
 $= -2^{200}$.

故选B .

方法二：

$$(-2)^{201} = (-2) \times (-2)^{200}$$

所以 $(-2)^{200} + (-2)^{201}$
 $= (-2)^{200} + (-2) \times (-2)^{200}$
 $= -(-2)^{200}$
 $= -2^{200}$.

故选B .

【标注】【知识点】有理数乘方运算

6. 计算： $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2007} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 -1的偶次幂为1，-1的奇次幂为-1 .

【标注】【知识点】有理数乘方运算

【能力】推理论证能力

7. 一根1m长的绳子，第一次剪去一半，第二次剪去剩下的一半，如此剪下去，第六次以后剩下的绳子的长度为（ ） .

- A. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ m}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{ m}$ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{ m}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \text{ m}$

【答案】 C

【解析】 $\because 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 第2次后剩下的绳子的长度为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 米；

以此类推第六次后剩下的绳子的长度为 $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 米 .

故选C

【标注】【知识点】有理数乘方运算

【能力】运算能力

栗子3

8. 如果 $(x+3)^2$ 与 $|y-2|$ 互为相反数，则 $(x+y)^{2021}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 $\because (x+3)^2$ 与 $|y-2|$ 互为相反数，

$$\therefore (x+3)^2 + |y-2| = 0 \text{ 且 } (x+3)^2 \geq 0, |y-2| \geq 0,$$

$$\therefore (x+3)^2 = 0, |y-2| = 0,$$

$$\therefore x+3 = 0, y-2 = 0,$$

$$\therefore x = -3, y = 2,$$

$$\therefore (x + y)^{2021}$$

$$= (-3 + 2)^{2021}$$

$$= (-1)^{2021}$$

$$= -1;$$

故答案为：-1.

【标注】【知识点】绝对值的非负性

独步天下

9. 计算机利用的是二进制数，它共有两个数码0、1，将一个十进制数转化为二进制数，只需要把该数写成若干个 2^n 数的和，依次写出1或0即可．如十进制数

$19 = 16 + 2 + 1 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ ，转化为二进制数就是10011，所以19是二进制下的5位数．问：365是二进制下的 _____ 位数．

【答案】9

【解析】 $\because 2^8 = 256, 2^9 = 512$ ，且 $256 < 365 < 512$ ，

$\therefore$ 最高位应是 1×2^8 ，

则共有位数 $8 + 1 = 9$ ，

故答案为：9.

【标注】【知识点】含乘方的有理数混合运算

二、科学记数法、近似数

1. 科学记数法

科学记数法：把一个大于10的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式（其中 $1 \leq a < 10$ ， n 是正整数）．

！方法：

①用科学记数法表示一个 n 位整数，其中10的指数是 $n - 1$ ，10的指数比整数的位数少 1 ．

②万= 10^4 ，亿= 10^8

【备注】科学技术法的核心是移动小数点：将小数点从个位数后移动到首位数后，小数点向前移动了几位，就是10的几次方．

10. 据2021年5月12日《天津日报》报道，第七次全国人口普查数据公布，普查结果显示，全国人口共141178万人．将141178用科学记数法表示应为（ ）．

A. 0.141178×10^6 B. 1.41178×10^5 C. 14.1178×10^4 D. 141.178×10^3

【答案】 B

【解析】 $141178 = 1.41178 \times 10^5$ ，

故选：B．

【标注】 【知识点】 科学记数法：表示较大的数

11. 从权威部门获悉，我国海洋面积是299.7万平方公里，约为陆地面积的三分之一，则陆地面积用科学记数法表示为（ ）平方公里．

A. 8.991×10^6 B. 8.991×10^4 C. 2.997×10^6 D. 2.997×10^4

【答案】 A

【解析】 $299.7 \times 3 = 899.1$ （万平方公里），

将陆地面积用科学记数法表示为 8.991×10^6 平方公里．

故选A．

【标注】 【知识点】 有理数乘法与实际问题

12. 十九大报告指出，我国目前经济保持了中高速增长，在世界主要国家中名列前茅，国内生产总值从54万亿元增长到80万亿元，稳居世界第二，其中80万亿用科学记数法表示为（ ）

A. 8×10^{12} B. 8×10^{13} C. 8×10^{14} D. 0.8×10^{13}

【答案】 B

【解析】 解：80万亿用科学记数法表示为 8×10^{13} ．

故选：B．

【标注】 【知识点】 科学记数法：表示较大的数

2. 近似数

(1) **准确数**：在日常生活和实际生产中，能准确地表示一些量的数，成为准确数。

例如：三班共50人，小樱养了3条金鱼，数字 **50** 和 **3** 就是准确数。

(2) **近似数**：与实际接近但存在一定偏差的数称为近似数。

近似数小数点后的末位数是0的，**不能去掉0**。

例如： π 取**3.14**，体重约**54kg**，这里 **3.14**、**54** 都是近似数。

(3) **精确度**：**近似数** 与 **准确数** 的接近程度。

一个近似数四舍五入到哪一位就称这个数精确到哪一位，精确度是精确的程度。

(4) **有效数字**：对于一个近似数，从左边第一个 **不是0** 的数字起，到精确到的位数为止，所有的数字都叫做这个数的有效数字。

精确度的类型：

①纯数字类：按四舍五入法对圆周率 π 取近似数时

$\pi \approx 3$ (精确到 **个** 位)

$\pi \approx 3.1$ (精确到 **十分** 位，或叫精确到 **0.1**)

$\pi \approx 3.14$ (精确到 **百分** 位，或叫精确到 **0.01**)

$\pi \approx 3.142$ (精确到 **千分** 位，或叫精确到 **0.001**)

②带单位类：近似数**2.6**万 (精确到 **千** 位)

③科学记数法类：近似数 **3.51×10^4** (精确到 **百** 位)

【备注】1. 对一个实数保留整数、也即取这个数精确到个位的近似数，就是要把小数部分省略；再

看十分位，如果十分位的数字大于或等于5则向前一位进一、小于5则舍。

保留一位小数、也即取这个数精确到十分位的近似数，就要把十分位以后的部分全部省略

再看百分位，如果百分位的数字大于或等于5则向前一位进一、小于5则舍。

保留两位小数、也即取这个数精确到百分位的近似数，就要把百分位以后的部分全部省略

再看千分位，如果千分位的数字大于或等于5则向前一位进一、小于5则舍。

2. 用科学记数法表示近似数时可以先将近似数写出来再用科学记数法表示，如：

189 000 (精确到万位)：189 000 $\approx$ 190000，再写成： 1.9×10^5

189 000 (精确到十万位)：189000 $\approx$ 200000，再写成： 2.0×10^5

3. 以上知识简单介绍一下即可，旨在帮助学生快速理解和掌握；**对基础弱的学生要详细讲解，清楚展示数位的数法（讲清楚怎样挪动小数点，注意尽量不要口误）**

栗子5

13. 近似数**2.30**万精确到 _____ 位。

【答案】百

【解析】近似数2.30万精确到百位 .

故答案为：百 .

【标注】【知识点】精确数位

14. 下列说法正确的是（ ） .

A. 近似数0.510精确到百分位

B. 近似数3.6万精确到十分位

C. 近似数 3.20×10^5 精确到千位

D. 近似数30000精确到万位

【答案】C

【解析】A 选项：近似数0.510精确到千分位，故选项A不合题意；

B 选项：近似数3.6万精确到千位，故选项B不合题意；

C 选项：近似数 3.24×10^5 精确到千位，故选项C符合题意；

D 选项：近似数30000精确到个位，故选项不符合题意 .

故选 C .

【标注】【知识点】精确数位

15. 已知圆周率 $\pi = 3.1415926 \dots$ ，将 π 精确到千分位的结果是（ ） .

A. 3.14

B. 3.140

C. 3.141

D. 3.142

【答案】D

【解析】圆周率 $\pi = 3.1415926 \dots$ ，将 π 精确到千分位的结果是3.142 .

【标注】【知识点】精确数位

三、有理数的混合运算

! 总结：

有理数混合运算的顺序：

①先 乘方，再 乘除，最后 加减；

②同级运算，从 左到右 进行；

③如有括号，先做 括号内 的运算，按 小 括号、中 括号、大 括号的顺序依次进行。

【备注】 **【注意】** 进行有理数混合运算时的易错点：

① 乘方概念错误，如 $2^3 = 6$ 等。

② 底数错误，如 $(-2)^2 = -4$ ， $-2^2 = 4$ 等。

③ 运算顺序发生错误，如 $2 \div \frac{1}{3} \times 3 = 2 \div 1 = 2$ 等。

④ 分配律运算错误，如 $-2 \times (2 - \frac{1}{2}) = -2 \times 2 - 2 \times \frac{1}{2} = -4 - 1 = -5$ 等。

栗子6

16. 计算。

$$(1) -3^2 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{2}{9} - \left|-\frac{2}{3}\right|.$$

$$(2) -1^4 + \frac{1}{6} \times [|-2| - (-3)^3 - (-2)^2] \div \left(-\frac{5}{2}\right)^2.$$

【答案】 (1) $-\frac{107}{12}$.
(2) $-\frac{1}{3}$.

【解析】 (1) 原式 $= -9 - \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{2}{9} - \frac{2}{3}$
 $= -9 + \frac{27}{8} \times \frac{2}{9} - \frac{2}{3}$
 $= -9 + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$
 $= \frac{-108 + 9 - 8}{12}$
 $= -\frac{107}{12}.$

(2) 原式 $= -1 + \frac{1}{6} \times (2 + 27 - 4) \times \frac{4}{25}$
 $= -1 + \frac{1}{6} \times 25 \times \frac{4}{25}$
 $= -1 + \frac{4}{6}$
 $= -1 + \frac{2}{3}$
 $= -\frac{1}{3}.$

【标注】 **【知识点】** 有理数四则混合运算

17. 计算：

$$\begin{aligned} (1) & 12 \div (-3) - (-8) \times \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}. \\ (2) & 3\frac{1}{3} - 2^2 \div \left\{ \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \right] \times 12 \right\}. \end{aligned}$$

【答案】 (1) $-\frac{19}{2}$.
 (2) $\frac{16}{3}$.

【解析】 (1) 原式 $= -4 - 8 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
 $= -4 - 6 + \frac{1}{2}$
 $= -10 + \frac{1}{2}$
 $= -\frac{19}{2}$.
 (2) 原式 $= \frac{10}{3} - 4 \div \left[\left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3}\right) \times 12 \right]$
 $= \frac{10}{3} - 4 \div \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 12 \right]$
 $= \frac{10}{3} - 4 \div (-6 + 4)$
 $= \frac{10}{3} + 4 \div 2$
 $= \frac{10}{3} + 2$
 $= \frac{16}{3}$.

【标注】【知识点】有理数四则混合运算

18. 计算：

$$\begin{aligned} (1) & (-1)^3 - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \times (-2)^2 \div \frac{1}{(-3^2)} - (-3)^3. \\ (2) & -8 \div \frac{4}{3} - \left[\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) \right] \times 20. \end{aligned}$$

【答案】 (1) 11.
 (2) 7.

【解析】 (1) 原式 $= -1 - \left(\frac{3}{12} - \frac{8}{12}\right) \times 4 \div \frac{1}{-9} - (-27)$
 $= -1 - \frac{-5}{12} \times 4 \times (-9) + 27$
 $= -1 - 15 + 27$
 $= 11$.
 (2) 原式 $= -8 \times \frac{3}{4} - \left[\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{10}\right) \right] \times 20$

$$\begin{aligned}
 &= -6 - \left[\frac{1}{4} - \frac{9}{10} \right] \times 20 \\
 &= -6 - [5 - 18] \\
 &= -6 - (-13) \\
 &= 7.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】含乘方的有理数混合运算

19. 计算：

$$\begin{aligned}
 (1) & \quad |-7| - (-1.2) - \left| 2 - 3\frac{1}{2} \right|. \\
 (2) & \quad -18 + (-2)^2 \times 5 + 48 \div (-4)^3. \\
 (3) & \quad -\frac{1}{2} \times (-3)^2 + \left| -\frac{5}{3} \right| \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right).
 \end{aligned}$$

【答案】 (1) 6.7 .

$$(2) \quad \frac{5}{4} .$$

$$(3) \quad -\frac{1}{2} .$$

【解析】 (1) $|-7| - (-1.2) - \left| 2 - 3\frac{1}{2} \right|$

$$\begin{aligned}
 &= 7 + 1.2 - 1.5 \\
 &= 8.2 - 1.5 \\
 &= 6.7 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & -18 + (-2)^2 \times 5 + 48 \div (-4)^3 \\
 &= -18 + 4 \times 5 + 48 \div (-64) \\
 &= -18 + 20 - \frac{3}{4} \\
 &= 2 - \frac{3}{4} \\
 &= \frac{5}{4} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & -\frac{1}{2} \times (-3)^2 + \left| -\frac{5}{3} \right| \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \times 9 + \frac{5}{3} \div \frac{5}{12} \\
 &= -\frac{9}{2} + 4 \\
 &= -\frac{1}{2} .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】含乘方的有理数混合运算

20. 计算下列各题（能简算则简算）。

$$\begin{aligned}
 (1) & 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 3. \\
 (2) & (-2)^4 \div (-8) - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times (-2^2). \\
 (3) & (-2.7) \times 2\frac{6}{11} + 1.2 \times 2\frac{6}{11}. \\
 (4) & \left[3\frac{1}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5}\right]^4 - 3 \times (-3)^3.
 \end{aligned}$$

【答案】 (1) -5 .

(2) $-2\frac{1}{2}$.

(3) $-\frac{42}{11}$.

(4) 162 .

【解析】 (1) 原式 $= -\left(3 \times \frac{2}{3}\right) - 3$
 $= -2 - 3$
 $= -5$.

(2) 原式 $= 16 \div (-8) - \left(-\frac{1}{8}\right) \times (-4)$
 $= -2 - \frac{1}{2}$
 $= -2\frac{1}{2}$.

(3) 原式 $= 2\frac{6}{11} \times (-2.7 + 1.2)$
 $= \frac{28}{11} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$
 $= -\frac{42}{11}$.

(4) 原式 $= \left[\frac{10}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{5}\right]^4 - 3 \times (-27)$
 $= \left(-5 \times \frac{3}{5}\right)^4 + 81$
 $= (-3)^4 + 81$
 $= 81 + 81$
 $= 162$.

【标注】【知识点】有理数四则混合运算